



Universiteit
Leiden
ICLON

Onderzoek naar diagnostische vragen over de stelling van Pythagoras in Havo 2

van

David Prins
1239414

Als onderdeel van de
MASTER OF SCIENCE IN LERAAR VOORBEREIDEND HOGER ONDERWIJS IN DE
BÈTAWETENSCHAPPEN (WISKUNDE)

aan het

Interfacultair Centrum voor Lerarenopleiding, Onderwijsonderzoek en Nascholing
ICLON
UNIVERSITEIT LEIDEN

Abstract

In dit artikel is onderzoek gedaan naar diagnostische vragen die adequaat misvattingen over de stelling van Pythagoras onderscheppen bij leerlingen van Havo 2. Het stellen van diagnostische vragen is een vorm van formatief handelen waarbij de docent feedback van de klas verzamelt en hier direct op acteert door bij te sturen op de gediagnosticeerde misvattingen. Veelvoorkomende misvattingen bij de stelling van Pythagoras zijn verzameld in interviews met vakdocenten. Naar aanleiding van de verzamelde misvattingen zijn diagnostische vragen gezocht in de wetenschappelijke literatuur en ontwikkeld binnen dit onderzoek. Hierbij is de nadruk gelegd op een balans tussen theoretische en strategische misvattingen. De diagnostische vragen zijn doorontwikkeld in een iteratief proces waarbij de vragen achtereenvolgens zijn voorgelegd aan vakdocenten, een leerling en een focusgroep. Als laatste is een vragenformulier met de ontwikkelde diagnostische vragen uitgedeeld aan een Havo 2 klas. De feedback vanuit het vragenformulier is gebruikt om de adequaatheid van de ontwikkelde diagnostische vragen en de vooraf geëxpliciteerde misvattingen te valideren. Het resultaat zijn drie door kwantitatieve en kwalitatieve data gevalideerde diagnostische vragen.

Inhoudsopgave

1	Introductie	1
2	Theoretisch kader	2
3	Methodologie	4
3.1	Verzamelen bekende misvattingen en bestaande diagnostische vragen over de stelling van Pythagoras	4
3.2	Ontwikkeling vragenformulier diagnostische vragen	5
3.3	Analysemethoden	6
4	Resultaten	8
4.1	Evaluatie diagnostische vragen op basis van een focusgroep	8
4.2	Evaluatie diagnostische vragen op basis van kwantitatieve data	10
4.3	Samenvatting	16
5	Conclusie	17
	Appendices	18
A	Diagnostische vragen versie 1	19
B	Diagnostische vragen versie 2	20
	References	22

Hoofdstuk 1

Introductie

Diagnostische vragen zijn een nuttig gereedschap in het onderwijs. Door specifieke meerkeuzevragen te stellen kunnen veelvoorkomende misvattingen bij leerlingen worden onderschept. Dit stelt docenten in staat om gericht en effectief bij te sturen (Barton, 2018; Faes, 2021). Sinds het werk van Barton (2018) zijn diagnostische vragen weer in opkomst. In 2022 hebben de Nederlands Vereniging voor Onderwijs in de Natuurwetenschappen (NVON), Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en het Interfacultair Centrum voor Lerarenopleiding, Onderzoek en Nascholing (ICLON) een databank opgericht voor diagnostische vragen in de bètavakken (NVON, NVvW, & ICLON, 2024). Dit onderzoek is een bijdrage aan dat werk.

Het huidige onderzoek richt zich op het diagnosticeren van misvattingen bij het leren van de stelling van Pythagoras, specifiek bij leerlingen in havo 2. Tijdens leerjaar 2 van de havo maken de leerlingen in de wiskundeles voor het eerst kennis met de stelling van Pythagoras. In deze fase van assimilatie en accommodatie kunnen diagnostische vragen een faciliterende rol spelen in het onderscheppen van misvattingen bij leerlingen. We onderzoeken welke misvattingen er bij leerlingen kunnen ontstaan en met behulp van welke diagnostische vragen hierop kan worden ingespeeld. Dit leidt tot de volgende onderzoeksvraag:

Welke diagnostische vragen over de stelling van Pythagoras onderscheppen misvattingen bij leerlingen van havo 2?

Door in gesprek te gaan met ervaren vakdocenten worden bekende misvattingen over de stelling met Pythagoras verzameld. Op basis van de verzamelde misvattingen wordt passende diagnostische vragen ontwikkeld. De ontwikkeling vindt plaats op basis van theoretische kaders en op basis van diagnostische vragen uit de bestaande literatuur. Daarnaast wordt in een iteratief proces, gebaseerd op “design-based research” zoals beschreven in Swan (2015), de vragen voorgelegd aan vakdocenten en aan een leerling. Daarna wordt de kwaliteit en adequaatheid van de diagnostische vragen geëvalueerd aan de hand van een focusgroep. Om de hoofdvraag van dit onderzoek verder te beantwoorden worden de ontwikkelde diagnostische vragen uitgedeeld aan leerlingen van havo 2. De antwoorden en uitleg van de leerlingen wordt geanalyseerd om de diagnostische vragen te valideren.

Dit onderzoek vervolgt met een theoretisch kader in hoofdstuk 2. Daarna worden de methodes gepresenteerd in hoofdstuk 3. Hoofdstuk 4 toont de resultaten van het onderzoek. Hoofdstuk 5 concludeert.

Hoofdstuk 2

Theoretisch kader

Het stellen van diagnostische vragen in de klas is een vorm van formatief handelen. Formatief handelen, of formatief evalueren, of formatief toetsen is een welbekend thema in het onderwijs (Black & Wiliam, 1998; Kirschner, Claessens, & Raaijmakers, 2018; Sluismans, 2020; van Silfhout, 2020). Vaak wordt verwezen naar het artikel van Black and Wiliam (1998) als de grondleggers van formatief handelen, zij beargumenteren dat formatief handelen leidt tot betere resultaten onder leerlingen. Formatief handelen wordt gedefinieerd als alle handelingen van leraren die hen feedback geven over het leerproces van de leerlingen en het inspelen op deze feedback. De feedback kan worden verzameld door bijvoorbeeld een geplande diagnostische toets of door het spontaan over de schouder van leerlingen meekijken. Essentieel aan formatief handelen is hoe er wordt omgegaan met deze feedback. Er kan pas gesproken worden van een formatieve handeling als de feedback leidt tot een adaptieve actie, een vernieuwde uitleg of een aanpassing van de werkvorm (Swan, 2015).

In het brede landschap van formatief handelen richten diagnostische vragen zich specifiek op misvattingen die bij leerlingen kunnen ontstaan. Misvattingen ontstaan wanneer leerlingen onjuiste overtuigingen meenemen in hun denkproces. Het artikel van Taamneh, Díez Palomar, and Mallart Solaz (2024) classificeert vijf type misvattingen:

- Een data fout. Een verkeerde interpretatie van de gegevens en de vraag.
- Een conceptuele fout. Deze ontstaat door onvoldoende begrip of kennis van de onderliggende theorie.
- Een strategische fout. Leerlingen kiezen een verkeerde strategie of procedure voor het probleem.
- Een fout in de berekening.
- Een fout in de conclusie.

Opmerkelijk richten veel van de studies naar misvattingen in de wiskundeles zich voornamelijk op het constateren van de misvatting, en niet zozeer op het oplossen ervan (Ay, 2017). Cruciaal aan diagnostische vragen is dat misvattingen niet alleen worden blootgelegd, maar ook zijn “te begrijpen op een efficiënte en accurate manier” (Barton, 2019, p. 413). Dit stelt de docent direct in staat om bij te sturen door de uitleg aan te passen, of door klassikaal of individueel feedback te geven. Op deze manier is het stellen van diagnostische vragen ook daadwerkelijk een vorm

van formatief handelen. In het artikel van Faes (2021) worden de vereisten beschreven waaraan een diagnostische vraag moet voldoen:

- Een diagnostische vraag is duidelijk en ondubbelzinnig.
- Diagnostische vragen onderzoeken één vaardigheid of één begrip.
- Een diagnostische vraag is binnen 10 seconden te beantwoorden.
- Iedere onjuiste antwoordoptie geeft feedback waar de docent mee aan de slag kan.
- Het juiste antwoord kan niet gevonden worden door te beredeneren vanuit een misvatting.

Wanneer diagnostische vragen op deze manier worden ontworpen zijn ze een efficiënt gereedschap om misvattingen bij leerlingen te onderscheppen én te corrigeren.

Bestaande wetenschappelijke literatuur over misvattingen bij de stelling van Pythagoras is schaars. Wanneer de stelling van Pythagoras wordt benoemd is deze onderdeel van een breder onderzoek naar bijvoorbeeld de epistemologie van leerlingen (Hutapea, Suryadi, & Nurlaelah, 2015) en worden er geen specifieke misvattingen benoemd, of het onderzoek is naar een specifiek aspect van de wiskunde en gebruikt de stelling van Pythagoras als voorbeeld, in Sutton (2012) wordt bijvoorbeeld onderzocht hoe leerlingen omgaan met verwisselingen van de benaming van de variabelen en in het geval van de stelling van Pythagoras ging dit de leerlingen prima af. Onderzoek specifiek naar misvattingen bij de stelling van Pythagoras vertelt dat misvattingen voornamelijk optreden bij het opstellen van een plan van aanpak door het kiezen van een ongeschikte strategie of procedure en door onvoldoende begrip van de onderliggende concepten en theorie (Taamneh et al., 2024). Er wordt geconcludeerd dat dit de belangrijkste onderdelen zijn voor docenten om leerlingen op bij te sturen wanneer zij aan de slag gaan met de stelling van Pythagoras en in dit onderzoek wordt daar ook rekening mee gehouden.

Hoofdstuk 3

Methodologie

In dit hoofdstuk wordt een vragenformulier ontwikkeld met adequate diagnostische vragen over de stelling van Pythagoras. Om passende diagnostische vragen te ontwikkelen worden eerst bekende misvattingen en bestaande diagnostische vragen over de stelling van Pythagoras verzameld. Daarna wordt een vragenformulier ontwikkeld op basis van de criteria uit hoofdstuk 2. De ontwikkeling van dit vragenformulier gaat door middel van een iteratief proces gebaseerd op het concept van “design-based research” (Swan, 2015). In dit proces worden de conceptvragen om en om ontwikkeld, aangescherpt en voorgelegd aan een ervaren vakdocent en aan een leerling. Als laatste beschrijven we de instrumenten waarmee het vragenformulier wordt geëvalueerd.

3.1 Verzamelen bekende misvattingen en bestaande diagnostische vragen over de stelling van Pythagoras

In gesprek met ervaren vakdocenten zijn bekende misvattingen over de stelling van Pythagoras onder leerlingen van Havo 2 verzameld. In tabel 3.1 zijn deze misvattingen weergegeven. Naast een beschrijving van de misvattingen zijn de misvattingen ook gecategoriseerd volgens de bevindingen in het theoretisch kader in hoofdstuk 2. Een misvatting wordt getypeerd als een verkeerde interpretatie van de gegevens, een fout in de strategie, of als onvoldoende begrip van de onderliggende theorie en concepten.

Table 3.1: Verzamelde misvattingen.

#	Misvatting	Categorie
1	In een figuur wordt de verkeerde zijde als de schuine zijde geïdentificeerd.	Data
2	In de berekening wordt vergeten om de getallen in het kwadraat te zetten.	Conceptueel
3	Na de berekening van $a^2 + b^2$ wordt vergeten om de wortel te trekken.	Conceptueel
4	Bij het berekenen van een rechthoekszijde wordt in de formule $a^2 + b^2 = c^2$ de rechthoekszijde ingevuld bij c . De vergelijking wordt niet omgeschreven.	Conceptueel
5	De stelling wordt toegepast zonder dat er sprake is van een rechthoekige driehoek.	Strategie

Naar aanleiding van de verzamelde misvattingen wordt op de webpagina van Barton gezocht naar diagnostische vragen die één vaardigheid toetsen (Barton, 2023). Hieronder worden de gevonden vragen weergegeven.

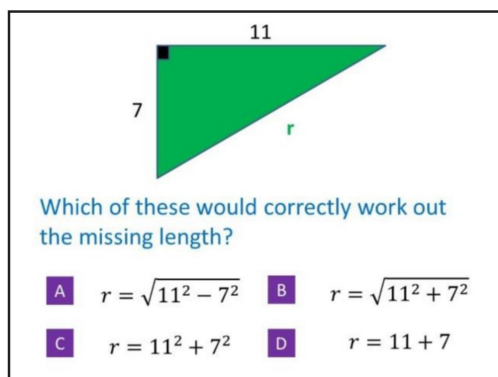


Fig. 3.1: Vraag 1 van Barton.

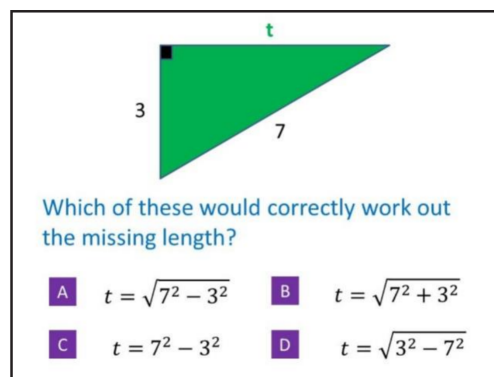
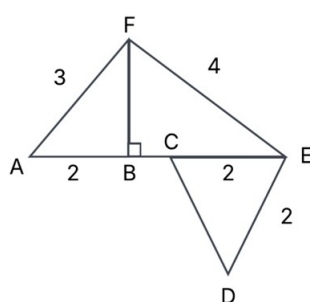


Fig. 3.2: Vraag 2 van Barton.

3.2 Ontwikkeling vragenformulier diagnostische vragen

De diagnostische vragen van Barton richten zich voornamelijk op de theoretische misvattingen: misvatting 2, 3 en 4 in tabel 3.1. In het theoretisch kader in hoofdstuk 2 is het belang van het bijsturen op zowel theorie als strategie benadrukt. Om ook strategische misvattingen bij de stelling van Pythagoras te onderscheppen is onderstaande diagnostische vraag ontworpen:

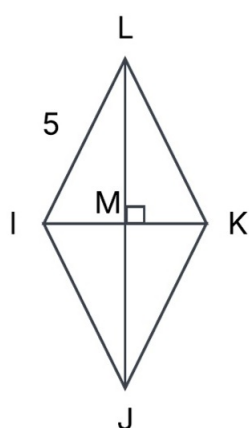


Welke zijde(s) van de figuur hiernaast kun je met de stelling van pythagoras bereken?

- A: Zijde BF
- B: Zijde BE
- C: Zijde BF en zijde BE
- D: Geen

Fig. 3.3: Ontworpen vraag 1.

In de eerste versie van het vragenformulier, te vinden in appendix A, is ervoor gekozen om de eerste vraag van Barton, figuur 3.1, op te nemen, en de vraag ontworpen in dit onderzoek, figuur 3.3, op te nemen. Om meer dekking te hebben voor conceptuele en strategische misvattingen is in overleg met een vakdocent besloten om de tweede vraag van Barton, figuur 3.2, toe te voegen en is een tweede strategische vraag ontworpen, hieronder te zien in figuur 3.4.



Je ziet hiernaast een ruit. Van een ruit zijn alle zijdes even lang.
Welke diagonalen kun je met de stelling van pythagoras berekenen?

- A: Diagonaal IK
- B: Diagonaal JL
- C: Diagonaal IK en JL
- D: Geen

Fig. 3.4: Ontworpen vraag 2.

Het resultaat is een vragenformulier met de vragen zoals gepresenteerd in appendix B. Wanneer we deze diagnostische vragen langs de vijf vereisten uit het theoretisch kader in hoofdstuk 2 leggen concluderen we dat de vragen één vaardigheid toetsen. De vragen die zijn overgenomen van Barton toetsen of leerlingen de stelling van Pythagoras correct kunnen toepassen in een bekende situatie. De vragen ontworpen in dit onderzoek toetsen of leerlingen kunnen herkennen wanneer de stelling van Pythagoras kan worden toegepast. Daarnaast is het vragenformulier voorgelegd aan een leerling om te bepalen of de vragen duidelijk en vlot te beantwoorden zijn. Uit het hardop denken van de leerling bleek dat de strekking van de vraag direct duidelijk was voor de leerling. De vragen waren echter niet altijd binnen 10 seconden te beantwoorden. In het geval van wiskundige opdrachten, waarbij vaak meerdere denkstappen moeten worden gemaakt, blijkt dit geen reële vereiste. Als laatste is in tabel 3.2 van iedere antwoordoptie gespecificeerd wat de geïmpliceerde misvatting is. Of dit overeenkomt met de gedachtegang van de leerlingen moet blijken uit de verdere analyse. Dat geldt ook voor het niet kunnen vinden van het juiste antwoord vanuit een misvatting.

Table 3.2: Antwoordopties diagnostische vragen met verwachte misvattingen.

	Antwoord A	Antwoord B	Antwoord C	Antwoord D
Vraag 1	Juiste antwoord.	Rechthoekzijde invullen bij c .	Wortel vergeten.	Rechthoekzijde invullen bij c en kwadraat vergeten.
Vraag 2	Schuine zijde fout benoemd.	Juiste antwoord.	Schuine zijde fout benoemd en vergeten wortel te trekken.	Vergeten te kwadrateren.
Vraag 3	Vergeten door te rekenen.	Fout aflezen figuur.	Juiste antwoord.	Fout aflezen figuur.
Vraag 4	Minimaal twee zijdes.	Minimaal twee zijdes.	Minimaal twee zijdes.	Juiste antwoord.

3.3 Analysemethoden

Om de kwaliteit en adequaatheid van het vragenformulier te evalueren worden twee instrumenten gebruikt. Het eerste instrument is hardop denken met een focusgroep. Dit is een kwalitatief

instrument. Aan enkele leerlingen uit havo 2 wordt iteratie 2 van het vragenformulier, te vinden in Appendix B, voorgelegd. Per vraag denken de leerlingen eerst individueel na over de vraag en beantwoorden deze, daarna gaan ze in overleg. De gedachten van de leerlingen worden opgeschreven. Op basis van deze gedachten worden de diagnostische vragen inclusief antwoordopties aangescherpt. Er wordt wederom gecontroleerd of de vragen voldoen aan de vijf vereisten uit hoofdstuk 2. Daarnaast wordt vastgesteld of de vragen voldoende dekkend zijn voor de gevonden misvattingen uit tabel 3.1. Ook is dit een eerste stap in de verificatie van de juistheid van de geïmpliceerde misvattingen per antwoordoptie in tabel 3.2. Het resultaat is de finale versie van het vragenformulier.

In de laatste fase van dit onderzoek wordt het vragenformulier uitgedeeld aan een volledige klas. Dit is het tweede instrument. Met behulp van beschrijvende statistieken wordt de kwantitatieve informatie geanalyseerd. Deze statistieken geven inzicht in de succespercentages en de haalbaarheid van de vragen. Ook geeft het inzicht in mogelijke antwoordpatronen tussen de vragen, bijvoorbeeld dat antwoord C bij vraag 1 altijd resulteert altijd in antwoord D bij vraag 2. Naast het beantwoorden van de diagnostische vragen wordt aan de leerlingen uit de klas ook gevraagd om hun gedachtegang op te schrijven. Deze informatie wordt gebruikt om de geïmpliceerde misvattingen per vraag te valideren en om te controleren of leerlingen niet het juiste antwoord kunnen vinden vanuit een misvatting.

Op basis van deze analyse wordt de adequaatheid van de ontworpen diagnostische vragen geëvalueerd en kan de hoofdvraag van dit onderzoek worden beantwoord.

Hoofdstuk 4

Resultaten

Dit hoofdstuk is opgedeeld in drie paragrafen. In de eerste paragraaf worden de resultaten van het eerste instrument, het hardop denken met leerlingen, besproken. Daarnaast worden de geïmpliceerde misvattingen zoals gepresenteerd in tabel 3.2 aangescherpt. In de tweede paragraaf wordt de analyse van de kwantitatieve data gepresenteerd. Ook wordt de aangescherpte versie van tabel 3.2 gevalideerd. De derde paragraaf vat samen.

4.1 Evaluatie diagnostische vragen op basis van een focusgroep

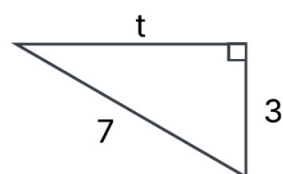
In de focusgroep wordt tijdens het hardop denken over vraag 1 en 2 uit iteratie 2, figuur B.1 en figuur B.2, door de leerlingen het verschil tussen optellen of aftrekken onder de wortel benoemd, maar worden de juiste conclusies getrokken. Een leerling zegt bijvoorbeeld: “Moet je hier nu min of plus doen? Oh, ja, het is min, want het is de rechte zijde.”. Ook stellen de leerlingen vast dat zowel het kwadrateren als wortel trekken nodig is. Op basis hiervan wordt voorlopig geconcludeerd dat deze vragen passen bij de valkuilen die worden getoetst. Bij vraag 3 en 4, figuur B.3 en figuur B.4, herkennen leerlingen uit de focusgroep dat er een rechthoekige driehoek met twee bekende zijden nodig is, en weten ze bij vraag 3 ook te beredeneren dat na zijde BF ook zijde BE berekend kan worden. Een leerling zegt bijvoorbeeld: “Kijk, hoek B is recht, dus daar kan je de zijdes berekenen.”. Wel benoemt een leerling dat bij vraag 3 zijde CD berekend kan worden, terwijl dit geen antwoordoptie is. Op basis van deze feedback worden de antwoordopties bij vraag 3 aangepast. Naast de feedback op de antwoordopties is uit het hardop denken gebleken dat de leerlingen zelfstandig in staat zijn de vragen te interpreteren en hier relatief vlot een antwoord bij te kiezen. De vragen uit iteratie 3 toetsen dus één vaardigheid, zijn duidelijk, en in relatief korte tijd te beantwoorden. De stelregel van maximaal 10 seconden nadenken over een vraag wordt hierbij wel losgelaten.

Naast de feedback van de leerlingen suggereert de vakdocent om bij vraag 1 uit iteratie 2, figuur B.1, antwoordoptie C ook een wortel te geven, omdat deze foute antwoordoptie anders voorzien wordt door leerlingen. Naar aanleiding van deze feedback is ervoor gekozen om bij vraag 1 alle antwoordopties een wortel te geven. Bij vraag 2 is er juist voor gekozen om maar twee antwoordopties een wortel te geven. Zo is er bij deze vragen een duidelijker onderscheid tussen het testen van misvatting 1, 2, 3 en 4 uit tabel 3.1. Vraag 1 toetst misvatting 2 en 4, en

vraag 2 toetst misvatting 1 en 3. Naar aanleiding van het hardop denken is in de finale iteratie van het invulformulier bij vraag 3 ook zijde CD als antwoordoptie toegevoegd.

De diagnostische vragen in de finale versie van het invulformulier zijn hieronder weergegeven. Naast het beantwoorden van de meerkeuzevragen krijgen de leerlingen ook schrijfruimte om uitleg te geven en hun gedachtegang te noteren.

Vraag 1



Wat is de juiste manier om de lengte van zijde t te berekenen?

A: $t = \sqrt{7^2 - 3^2}$

B: $t = \sqrt{7^2 + 3^2}$

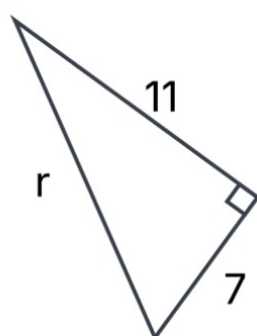
C: $t = \sqrt{7 - 3}$

D: $t = \sqrt{7 + 3}$

Antwoord: A B C D

Fig. 4.1: Diagnostische vraag 1 iteratie 3.

Vraag 2



Wat is de juiste manier om de lengte van zijde t te berekenen?

A: $r = 11^2 - 7^2$

B: $r = 11^2 + 7^2$

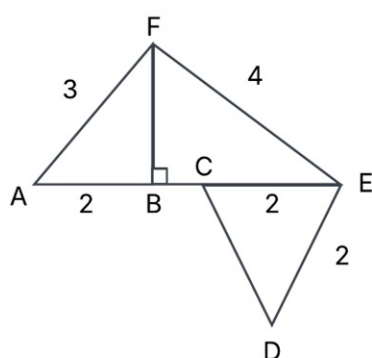
C: $r = \sqrt{11^2 - 7^2}$

D: $r = \sqrt{11^2 + 7^2}$

Antwoord: A B C D

Fig. 4.2: Diagnostische vraag 2 iteratie 3.

Vraag 3



Welke zijde(s) van de figuur hiernaast kun je met de stelling van pythagoras berekenen?

A: Zijde BF en zijde CD

B: Zijde BF en zijde BE

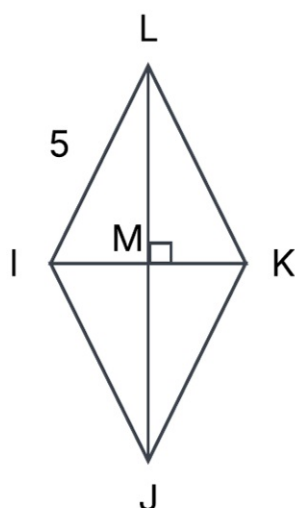
C: Zijde BE en zijde CD

D: Zijde BF, zijde BE, en zijde CD

Antwoord: A B C D

Fig. 4.3: Diagnostische vraag 3 iteratie 3.

Vraag 4



Je ziet hiernaast een ruit. Van een ruit zijn alle zijdes even lang. Welke diagonalen kun je met de stelling van pythagoras berekenen?

- A: Diagonaal IK
- B: Diagonaal JL
- C: Diagonaal IK en JL
- D: Geen

Fig. 4.4: Diagnostische vraag 4 iteratie 3.

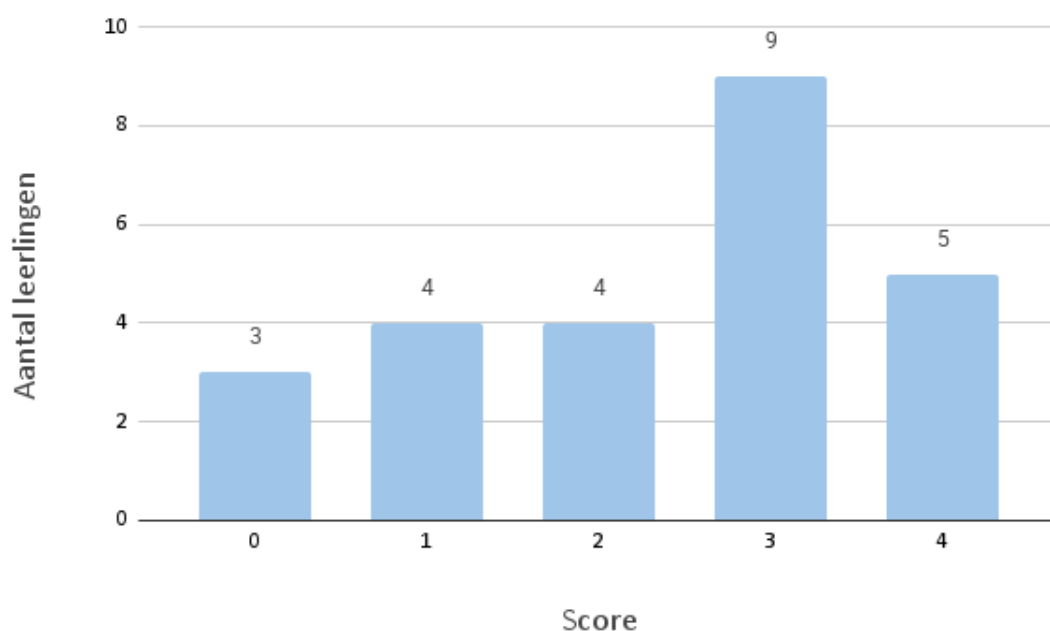
In hoofdstuk 3 is in tabel 3.2 aangegeven wat de geïmpliceerde misvattingen per vraag zijn. Zo ontvangt de docent direct feedback waarmee hij of zij aan de slag kan. Tabel 4.1 presenteert een aangescherpte versie van deze tabel naar aanleiding van de diagnostische vragen zoals hierboven weergegeven.

Table 4.1: Antwoordopties diagnostische vragen met verwachte misvattingen.

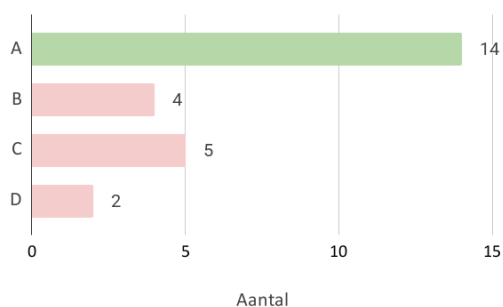
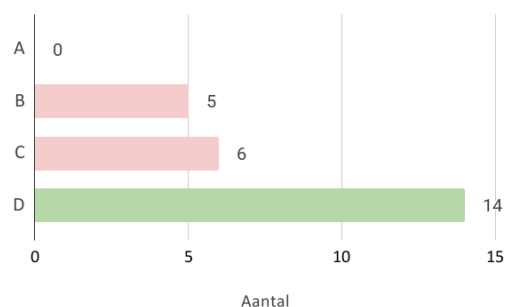
	Antwoord A	Antwoord B	Antwoord C	Antwoord D
Vraag 1	Juiste antwoord.	Rechthoekzijde invullen bij c .	Kwadraat vergeten.	Rechthoekzijde invullen bij c en kwadraat vergeten.
Vraag 2	Schuine zijde fout benoemd en vergeten wortel te trekken.	Vergeten wortel te trekken.	Schuine zijde fout benoemd.	Juiste antwoord.
Vraag 3	De stelling toepassen zonder rechthoekige driehoek en vergeten door te rekenen.	Juiste antwoord.	De stelling toepassen zonder rechthoekige driehoek en fout aflezen figuur.	De stelling toepassen zonder rechthoekige driehoek.
Vraag 4	Minimaal twee zijdes.	Minimaal twee zijdes.	Minimaal twee zijdes.	Juiste antwoord.

4.2 Evaluatie diagnostische vragen op basis van kwantitatieve data

Het vragenformulier is uitgedeeld aan een havo 2 klas en ingevuld door 25 leerlingen. Onderstaande grafiek laat een telling van de scores van de leerlingen zien. Bij een score van 0 is geen enkele vraag goed beantwoord, bij een score van 4 zijn alle vragen goed beantwoord.

**Fig. 4.5:** Scores leerlingen.

In totaal is 59% van de vragen juist beantwoord. Meer dan de helft van de leerlingen, 14 in totaal, heeft ten minste drie van de vier vragen juist beantwoord. Drie leerlingen hebben geen enkele vraag goed beantwoord. In het algemeen is er geen patroon zichtbaar in de foutverdeling. Het enige wat valt op te merken is dat van de 9 leerlingen met een score van 3 geen enkele leerling vraag 3 fout heeft beantwoord. Verder heeft in enkele gevallen een leerling in eerste instantie het verkeerde antwoord gegeven, maar heeft daarna in de uitleg zichzelf gecorrigeerd. Het origineel gegeven antwoord is wel blijven staan in de scores. Onderstaande afbeeldingen geven per vraag weer welke antwoorden er door de leerlingen zijn gegeven. Het juiste antwoord is groen gemarkeerd.

**Fig. 4.6:** Antwoorden vraag 1.**Fig. 4.7:** Antwoorden vraag 2.

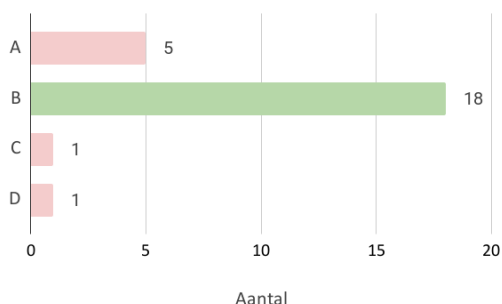


Fig. 4.8: Antwoorden vraag 3.

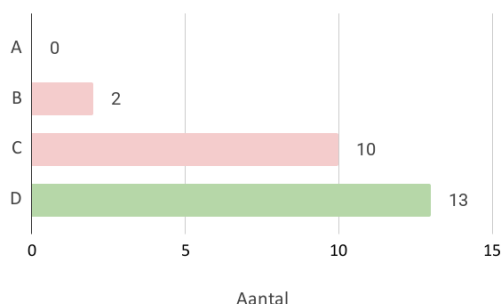


Fig. 4.9: Antwoorden vraag 4.

In tabel 4.1 zijn per antwoordoptie de bedachte misvattingen beschreven. De kwalitatieve feedback van de leerlingen wordt gebruikt om deze bedachte misvattingen te valideren. In tabel 4.2 wordt per vraag de meest voorkomende uitleg van de leerlingen beschreven. De reacties zijn gegroepeerd en gecomprimeerd. Bij vraag 1 stelt bijvoorbeeld een leerling: “Omdat we niet de lange zijde berekenen dus het is – en je moet altijd kwadraat doen dus A”. Dit is in de tabel samengevat als “Rechthoekzijde dus –.” en “Het moet in het kwadraat.”. Daarnaast is per antwoord ook aangegeven welk percentage van de leerlingen deze uitleg gaf. Bijvoorbeeld bij vraag 2 hebben vijf leerlingen optie B gekozen en drie van deze leerlingen een uitleg hebben opgeschreven die is is samengevat als “schuine zijde dus +.”, dan komt deze uitleg in 60% van de gevallen voor.

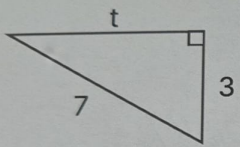
Table 4.2: Antwoorden diagnostische vragen met de meestvoorkomende uitleg van leerlingen.

	Antwoord A	Antwoord B	Antwoord C	Antwoord D
Vraag 1	Rechthoekzijde dus –. (57%) Het moet in het kwadraat. (36%)	Zo werkt de stelling. (75%)	Rechthoekzijde dus –. (60%) Het kan niet langer zijn dan de schuine zijde. (40%)	Gemengd. (2 leerlingen)
Vraag 2	(0 leerlingen)	Schuine zijde dus +. (60%)	Gemengd. (6 leerlingen) Schuine zijde dus –. (33%)	Schuine zijde dus +. (64%)
Vraag 3	Daar heb je twee zijdes. (60%)	Daar zit een rechte hoek in. (67%) Na zijde BF kan je BE berekenen. (22%).	(1 leerling)	(1 leerling)
Vraag 4	(0 leerlingen)	Gemengd. (2 leerlingen)	Ik weet het niet. (50%)	Je hebt minimaal twee zijdes nodig. (77%)

Bij vraag 1 is zichtbaar dat het juiste antwoord, antwoord A, vanuit de juiste redenering wordt gevonden. Bij antwoord B lopen de leerlingen inderdaad in de verwachten valkuil. De stelling wordt direct toegepast zonder deze om te schrijven. Bij antwoord C tonen de de leerlingen een

goed begrip van het concept, maar zijn ze vergeten om te kwadrateren. Een leerling beargumenteerd bijvoorbeeld: “omdat je de korte zijde wil.”, wat overeenkomt met rechthoekzijde dus $-$, en slaat hierbij het kwadrateren over. Zie figuur 4.10. Antwoord D is weinig gekozen en daarom zijn hier geen inzichten uit te halen. De argumentaties van de leerlingen komen overeen met de verwachte misvattingen uit tabel 4.1.

Vraag 1



Wat is de juiste manier om de lengte van zijde t te berekenen?

A: $t = \sqrt{7^2 - 3^2}$
 B: $t = \sqrt{7^2 + 3^2}$
 C: $t = \sqrt{7 - 3}$
 D: $t = \sqrt{7 + 3}$

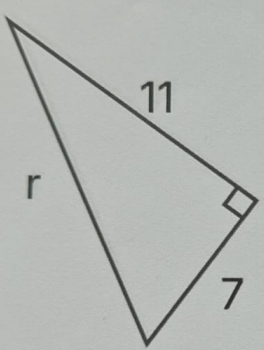
Antwoord: A B **C** D

Uitleg:
 omdat je de korte zijde wilt.

Fig. 4.10: Antwoord leerling vraag 1.

Bij vraag 2 is antwoord A geen enkele keer gekozen. Bij antwoord B tonen de leerlingen opnieuw een correct begrip voor een deel van de theorie, maar zijn vergeten wortel te trekken. Opmerkelijk is dat de argumentatie van deze leerlingen vaak overeenkomt met die van leerlingen die antwoord D hebben gekozen. Een leerling die antwoord B heeft gegeven stelt: “Omdat zijde r een schuine zijde is, is het $+$ dit is te zien aan het 90° teken.”, zie figuur 4.11. Terwijl een leerling die antwoord D heeft gegeven een vergelijkbare redenatie opschrijft: “Het is $+$ want je berekent de schuine zijde.”, zie figuur 4.12.

Vraag 2



Wat is de juiste manier om de lengte van zijde t te berekenen?

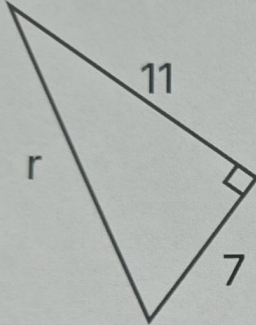
A: $r = 11^2 - 7^2$
 B: $r = 11^2 + 7^2$
 C: $r = \sqrt{11^2 - 7^2}$
 D: $r = \sqrt{11^2 + 7^2}$

Antwoord: A **B** C D

Uitleg:
 omdat zijde r een schuine zijde is het $+$ dit is te zien aan het 90° teken.

Fig. 4.11: Antwoord leerling vraag 2B.

Vraag 2



Wat is de juiste manier om de lengte van zijde r te berekenen?

A: $r = 11^2 - 7^2$

B: $r = 11^2 + 7^2$

C: $r = \sqrt{11^2 - 7^2}$

D: $r = \sqrt{11^2 + 7^2}$

Antwoord: A B C D

Uitleg:

Ik heb het B + want je berekent de schuine zijde

Fig. 4.12: Antwoord leerling vraag 2D.

Het wel of niet gebruiken van een wortel gaat dus geregeld impliciet mis of niet mis en dat kan effectief achterhaald worden met deze diagnostische vraag. Bij antwoord C worden verschillende reacties gegeven. Een leerling corrigeert zichzelf: “Ik bedoelde eigenlijk D, ..., je weet de 2 korte zijdes dus je moet het plus doen.”. Een ander maakt de verwachte fout en heeft de figuur verkeerd afgelezen: “Er wordt weer naar dezelfde zijde gevraagd.” (als bij vraag 1). Sommige leerlingen geven de juiste argumentatie maar hebben toch het verkeerde antwoord omcirkeld. Twee leerlingen beargumenteren dat bij de schuine zijde het verschil moet worden genomen. Dit is een misvatting waar vooraf geen rekening mee werd gehouden, afgaand op wat een van deze leerlingen bij vraag 1 opschrijft: “met alleen de rechthoekzijde moet je + doen” is dit mogelijk ook de keerzijde van de misvatting “Rechthoekzijde invullen bij c ”. Bij antwoord D, de juiste antwoordoptie, geven de meeste leerlingen ook de verwachte uitleg en er wordt niet geredeneerd vanuit een misvatting. Over het algemeen komen de reacties dus overeen met de verwachte misvattingen uit tabel 4.1.

Bij vraag 3 zijn de resultaten eenduidig. In het geval van antwoordoptie A hebben de leerlingen gekeken naar de twee driehoeken met bekende zijdes en hebben daarbij niet gecontroleerd of er sprake was van een rechte hoek. Een leerling stelt bijvoorbeeld: “Omdat je van beide figuren 2 zijden weet.”. Bij antwoordoptie B laten leerlingen op verschillende manieren zien het juiste antwoord te vinden. Een leerling schrijft: “Daar heb je 2 zijdes en een rechte hoek.”. In het verlengde hiervan schrijft een andere leerling: “Want zijde CD loopt schuin naar beneden en is een ander soort driehoek.”. Een kleiner deel van de leerlingen benoemt ook expliciet het doorrekenen: “Je weet zijde AB en AF en dan kan je BF berekenen en als je BF hebt heb je ook EF waardoor je BE kunt berekenen.”, zie figuur 4.13. Antwoord C en D zijn beide maar door één leerling gekozen, daarom kunnen hier geen conclusies uit getrokken worden. De foute antwoordopties komen wederom overeen met de interpretaties in tabel 4.1, wel geldt dat leerlingen die antwoord A kiezen voornamelijk niet opletten of de driehoek wel rechthoekig is.

Vraag 3

Welke zijde(s) van de figuur hiernaast kun je met de stelling van Pythagoras berekenen?

A: Zijde BF en zijde CD
 B: Zijde BF en zijde BE
 C: Zijde BE en zijde CD
 D: Zijde BF, zijde BE, en zijde CD

Antwoord: A ☒ B C D

Uitleg:

je weet zijde AB en AF en dan kan je BF berekenen en als je BF hebt heb je ook EF waardoor je BE kunt berekenen

Fig. 4.13: Antwoord leerling vraag 3.

Bij vraag 4 geeft een relatief groot deel van de leerlingen aan de vraag niet goed te begrijpen. Sommige leerlingen die voor antwoord C hebben gekozen beredeneren vanuit een misvatting, zo schrijft een leerling: “Alle zijdes zijn 5 dus dan heb je genoeg info.”. De leerlingen die het juiste antwoord hebben gegeven geven over het algemeen de verwachte uitleg. Zo stelt een leerling bijvoorbeeld: “Je hebt 2 getallen nodig om een zijde te kunnen berekenen.”, zie figuur 4.14. Bij de leerlingen die de vraag begrijpen geven de antwoordopties dus feedback die overeenkomt met de verwachtingen uit tabel 4.1.

Vraag 4

Je ziet hiernaast een ruit. Van een ruit zijn alle zijdes even lang. Welke diagonalen kun je met de stelling van Pythagoras berekenen?

A: Diagonaal IK
 B: Diagonaal JL
 C: Diagonaal IK en JL
 D: Geen

Antwoord: A B C ☒ D

Uitleg:

je hebt 2 getallen nodig om een zijde te kunnen bereken met een ruit het niet

Fig. 4.14: Antwoord leerling vraag 4.

Op grond van deze kwalitatieve analyse is tabel met misvattingen 4.1 gevalideerd. De geïmpliceerde misvattingen komen overeen met de argumentaties van de leerlingen. Alleen bij vraag 2 antwoordoptie C dient nog een kleine aanpassing te worden verwerkt, hier dient nog een misvatting aan worden toegevoegd: bij een schuine zijde wordt het verschil tussen het kwadraat van de andere twee zijdes nemen. Dit is in essentie de al beschreven misvatting: rechthoekzijde invullen bij c . Hieronder wordt de aangepaste tabel weergegeven.

Table 4.3: Antwoordopties diagnostische vragen met verwachte misvattingen.

	Antwoord A	Antwoord B	Antwoord C	Antwoord D
Vraag 1	Juiste antwoord.	Rechthoekzijde invullen bij c .	Kwadraat vergeten.	Rechthoekzijde invullen bij c en kwadraat vergeten.
Vraag 2	Schuine zijde fout benoemd en vergeten wortel te trekken.	Vergeten wortel te trekken.	Schuine zijde fout benoemd, of, rechthoekzijde invullen bij c .	Juiste antwoord.
Vraag 3	De stelling toepassen zonder rechthoekige driehoek en vergeten door te rekenen.	Juiste antwoord.	De stelling toepassen zonder rechthoekige driehoek en fout aflezen figuur.	De stelling toepassen zonder rechthoekige driehoek.
Vraag 4	Minimaal twee zijdes.	Minimaal twee zijdes.	Minimaal twee zijdes.	Juiste antwoord.

4.3 Samenvatting

Naar aanleiding van de kwalitatieve en kwantitatieve analyse concluderen we dat vraag 1, 2 en 3 voldoen aan vier van de vijf eisen van een diagnostische vraag. In de ontwikkeling van de diagnostische vragen werd vastgesteld dat de diagnostische vragen één vaardigheid toetsen. Tijdens het hardop denken is geconcludeerd dat de vragen duidelijk zijn voor de leerlingen. Op basis van de kwalitatieve en kwantitatieve data is gevalideerd dat de foute antwoordopties feedback geven waarmee de docent direct aan de slag kan, zoals beschreven in tabel 4.3. Als laatste is geverifieerd dat de juiste antwoordopties niet gevonden worden vanuit een verkeerde redenering. Vraag 4 voldoet aan bijna alle eisen van een diagnostische vraag, echter, vanuit de kwantitatieve data bleek dat vraag 4 niet door alle leerlingen werd begrepen. Deze vraag heeft nog een revisie nodig.

Hoofdstuk 5

Conclusie

In dit artikel is onderzoek gedaan naar veelvoorkomende misvattingen over de stelling van Pythagoras bij leerlingen van Havo 2. Concluderend zijn in dit onderzoek vijf veelvoorkomende misvattingen vastgesteld, te vinden in tabel 3.1. Op basis van de gevonden misvattingen zijn diagnostische vragen ontwikkeld die deze misvattingen dienen te onderscheppen. In het ontwikkelproces is rekening gehouden met de kaders uit de wetenschappelijke literatuur en is in een iteratief proces onder andere feedback van hardop denken uit een focusgroep verwerkt. De diagnostische vragen zijn opgenomen in een invulformulier dat uitgedeeld is aan een havo 2 klas. De kwantitatieve en kwalitatieve data die dit heeft opgeleverd is geanalyseerd om de ontwikkelde diagnostische vragen te evalueren. Het resultaat zijn drie door data gevalideerde diagnostische vragen die verschillende misvattingen bij leerlingen achterhalen. De uiteindelijke diagnostische vragen zijn terug te zien in figuur 4.1, 4.2 en 4.3. De bijbehorende misvattingen staan in tabel 4.3.

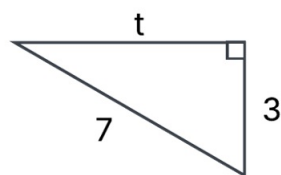
Tijdens de ontwikkeling van de diagnostische vragen bleek dat misvattingen over de stelling van Pythagoras nog nauwelijks gedocumenteerd zijn. Dit onderzoek is een eerste stap naar het in beeld brengen van deze misvattingen. Ook is het belang van het direct kunnen acteren op de blootgelegde misvattingen benadrukt. Door de verwachte misvattingen per antwoordoptie expliciet te maken, zoals in tabel 4.3, is inzichtelijk welke misvatting hoort bij welke foute antwoordoptie. Deze tabel is ook gevalideerd op basis van de feedback uit een vragenformulier dat is uitgedeeld aan leerlingen van Havo 2. Deze onderzoeksmethode, het expliciteren van de misvattingen per antwoordoptie en deze vervolgens valideren, kan in vervolgonderzoek ook bij diagnostische vragen over andere wiskundige concepten worden toegepast. Verder kwam het belang van toetsen op inzicht bij de stelling van Pythagoras naar voren. Niet alleen de theoretische kennis kan misvattingen bevatten, ook de strategische kennis en aanpak. Hiertoe zijn in dit onderzoek twee vragen ontwikkeld die zich specifiek richten op het strategische wiskundige vaardigheden bij de stelling van Pythagoras. Een van deze twee vragen is succesvol gevalideerd, de andere vraag heeft nog een aanscherping nodig. Naast het gereedschap dat dit onderzoek heeft ontwikkeld leidt dit ook tot de aanbeveling om in te zetten op het diagnostisch toetsen van strategische vaardigheden in de wiskundeles. Specifiek bij de stelling van Pythagoras, maar ook in het algemeen bij wiskundige concepten.

Appendices

Appendix A

Diagnostische vragen versie 1

Vraag 1



Wat is de juiste manier om de lengte van zijde t te berekenen?

A: $t = \sqrt{7^2 - 3^2}$

B: $t = \sqrt{7^2 + 3^2}$

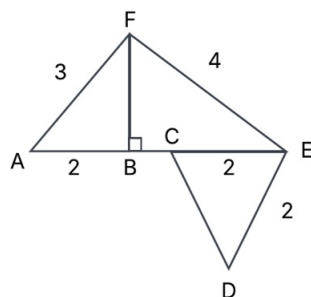
C: $t = 7^2 - 3^2$

D: $t = \sqrt{3^2 - 7^2}$

Antwoord: A B C D

Fig. A.1: Diagnostische vraag 1 iteratie 1.

Vraag 3



Welke zijde(s) van de figuur hiernaast kun je met de stelling van pythagoras berekenen?

A: Zijde BF

B: Zijde BE

C: Zijde BF en zijde BE

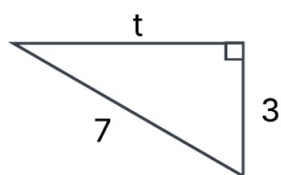
D: Geen

Fig. A.2: Diagnostische vraag 2 iteratie 1.

Appendix B

Diagnostische vragen versie 2

Vraag 1



Wat is de juiste manier om de lengte van zijde t te berekenen?

A: $t = \sqrt{7^2 - 3^2}$

B: $t = \sqrt{7^2 + 3^2}$

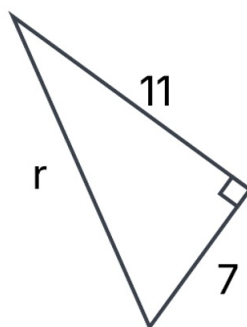
C: $t = 7^2 - 3^2$

D: $t = \sqrt{7 + 3}$

Antwoord: A B C D

Fig. B.1: Diagnostische vraag 1 iteratie 2.

Vraag 2



Wat is de juiste manier om de lengte van zijde t te berekenen?

A: $r = \sqrt{11^2 - 7^2}$

B: $r = \sqrt{11^2 + 7^2}$

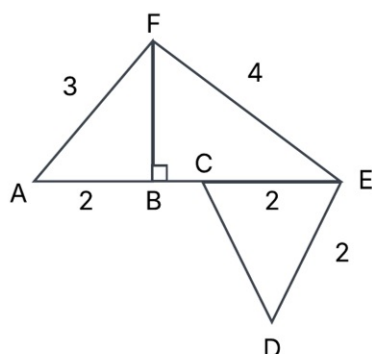
C: $r = 11^2 - 7^2$

D: $r = \sqrt{11 + 7}$

Antwoord: A B C D

Fig. B.2: Diagnostische vraag 2 iteratie 2.

Vraag 3

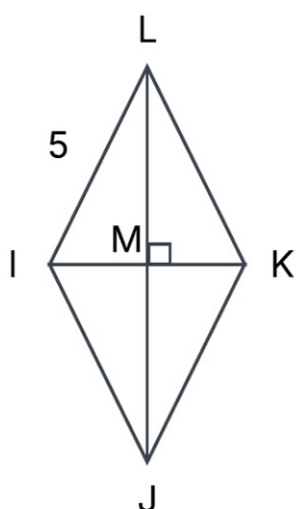


Welke zijde(s) van de figuur hiernaast kun je met de stelling van pythagoras berekenen?

- A: Zijde BF
- B: Zijde BE
- C: Zijde BF en zijde BE
- D: Geen

Fig. B.3: Diagnostische vraag 3 iteratie 2.

Vraag 4



Je ziet hiernaast een ruit. Van een ruit zijn alle zijdes even lang. Welke diagonalen kun je met de stelling van pythagoras berekenen?

- A: Diagonaal IK
- B: Diagonaal JL
- C: Diagonaal IK en JL
- D: Geen

Fig. B.4: Diagnostische vraag 4 iteratie 2.

References

- Ay, Y. (2017). A review of research on the misconceptions in mathematics education. *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology*, 2017, 21–31.
- Barton, C. (2018). *How I wish I had taught maths: Reflections on research, conversations with experts, and 12 years of mistakes*. Hachette UK.
- Barton, C. (2019). *Volgens barton: lesgeven in wiskunde aan de hand van wetenschap, experts, en 12 jaar aan mislukkingen*. Phronese.
- Barton, C. (2023). *Pythagoras (2d and 3d): Diagnostic questions*. Retrieved 2025-04-25, from <https://www.mrbartonmaths.com/topics/pythagoras-and-trigonometry/pythagoras-2d-and-3d/dq.html>
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: principles, policy & practice*, 5(1), 7–74.
- Faes, S. (2021). Ontdek misconcepten; collectieve kennis vertaald naar bruikbare vragen. *NVOX*, 6, 46–47.
- Hutapea, M. L., Suryadi, D., & Nurlaelah, E. (2015). Analysis of students' epistemological obstacles on the subject of pythagorean theorem. *Jurnal Pengajaran MIPA*, 20(1), 1–10.
- Kirschner, P. A., Claessens, L. C. A., & Raaijmakers, S. F. (2018). *Op de schouders van reuzen: Inspirerende inzichten uit de cognitieve psychologie voor leerkrachten*. Ten Brink Uitgevers.
- NVON, NVvW, & ICLON. (2024). *Diagnostische vragen in de bètavakken: misvattingen opsporen en aanpakken. het ontwerpen van hoge kwaliteit diagnostische vragen in docenten ontwikkel teams (DOTs) en deze beschikbaar maken voor alle bètadocenten*. Retrieved 2025-04-23, from <https://www.diagnostischevragen.nl/wp-content/uploads/2024/11/Diagnostische-vragen-in-de-betavakken-onderzoek-boekje.pdf>
- Sluijsmans, D. (2020). Toetsing als kans voor leren. formatief toetsen en evalueren.
- Sutton, K. (2012). *A study of students' misconceptions regarding variables in the pythagorean theorem and slope/intercept formula*. (Unpublished doctoral dissertation). CiteSeer.
- Swan, M. (2015). Designing formative assessment lessons for concept development and problem solving. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Taamneh, M. A., Díez Palomar, F. J., & Mallart Solaz, A. (2024). Examining tenth-grade students' errors in applying polya's problem-solving approach to pythagorean theorem. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 2024, vol. 20, num. 12, em2551.
- van Silfhout, G. (2020). Formatief evalueren in het voortgezet onderwijs. werken aan groei.